Ministerium für Kultus, Jugend und Sport

Schriftliche Abiturprüfung **Mathematik**

ab 2004

Pflichtteil

Aufgabe 1

Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} + e^{x} - 2 = 0$.

(2 VP)

Aufgabe 2

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$.

(2 VP)

Aufgabe 3

Geben Sie für die Funktion f mit $f(x) = 3(x^2 - 4e^{-2x})$ eine Stammfunktion an.

(2 VP)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass das Schaubild von f mit $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-x}$; $x \in IR$ an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt hat.

(3 VP)

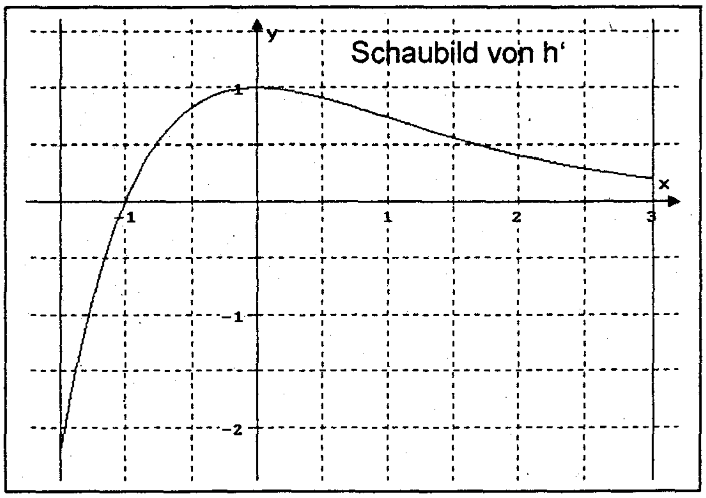
Aufgabe 5

h ist eine für $x \in IR$ differenzierbare Funktion.

Nebenstehend ist für $-1{,}5 \le x \le 3$ das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion h' dargestellt.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion h richtig, falsch oder unentscheidbar sind.

Begründen Sie Ihre Entscheidung.



(1) An der Stelle $x = -1$ hat das Schaubild von h einen Tiefpunkt.

(2) $h(x) > 0$ für $0 \le x \le 3$.

(3) An der Stelle $x = 0$ hat das Schaubild von h eine Tangente, die parallel ist zur Geraden mit der Gleichung $y = x - 7$.

(4) h ist streng monoton wachsend für $-1{,}5 \le x \le 0$.

(6 VP)

Pflichtteil

Aufgabe 6

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ x_1 & & & - & 3x_3 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 2 \end{array}$$

(4 VP)

Aufgabe 7

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E durch

$g\colon\ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u};\quad r \in \mathbb{R}$ und $E\colon\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0.$

a) Welche geometrische Bedeutung haben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{u}$ bzw. $(\vec{x} - \vec{p})$ und $\vec{n}$?
Veranschaulichen Sie Ihre Antwort mithilfe einer Skizze.

b) Welche Beziehungen müssen für die in den Gleichungen vorkommenden Vektoren gelten, damit

i) g parallel zu E ist ?

ii) g senkrecht zu E verläuft ?

(5 VP)

Wahlteil Schwerpunkt Analysis

Aufgabe I 1.1

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+4}$; $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f sei K.

a) Skizzieren Sie K mithilfe Ihres Taschenrechners.
Das Flächenstück zwischen K, der x-Achse und den Geraden x=0 und x=2 rotiert um die x-Achse.
Bestimmen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

b) Welche Eigenschaften von K können dem Funktionsterm f(x) ohne Verwendung von Ableitungen entnommen werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) f wird für $x \geq 2$ verglichen mit einer Funktion h, die dort durch $h(x) = 2 - 8\,e^{-2x}$ gegeben ist.
Zeigen Sie, dass der Unterschied zwischen den Funktionswerten von f und h monoton fällt.
Wie groß wird der maximale Unterschied?

d) Zeigen Sie, dass die Funktion h ein beschränktes Wachstum beschreibt.
Kann das auch über f gesagt werden?

(12 VP)

Aufgabe I 1.2

Die Folge (a_n) ist rekursiv vorgegeben durch

$$a_1 = \frac{1}{3}\ ; \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} .$$

Geben Sie einen Term für a_n in geschlossener Form an und begründen Sie Ihr Ergebnis.

(6 VP)

Wahlteil Schwerpunkt Analysis

Aufgabe I 2

Bei Testfahrten auf dem Gelände eines Automobilherstellers wird ein Testfahrzeug automatisch gesteuert.

Eine Testfahrt mit der durch die Funktion v mit

$$v(t) = \frac{1600\,t}{10\,t+1} \;;\; 0 \le t \le 3 \quad \text{(t in Stunden; v(t) in km/h)}$$

gegebenen Geschwindigkeits-Zeitfunktion wird nach 3 Stunden abgebrochen.

Die Funktion k mit

$$k(x) = \frac{1000}{250-x} \;;\; x \ge 0 \quad \text{(x in km/h ; k(x) in Liter pro 100 km)}$$

beschreibt grob den Kraftstoffverbrauch des Testfahrzeugs.

a) Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Testfahrzeugs während dieser Testfahrt ständig zunimmt.
Wie lange dauert es, bis das Testfahrzeug die Geschwindigkeit 40 km/h erreicht?
Welcher Kraftstoffverbrauch ergibt sich mittels der Funktion k bei dieser Geschwindigkeit?

b) Begründen Sie, dass durch $\frac{k\left(v(t)\right)\cdot v(t)}{100}$ der momentane Kraftstoffverbrauch zum Zeitpunkt t in Liter pro Stunde beschrieben werden kann.
Berechnen Sie damit den durchschnittlichen Kraftstoffverbrauch während der Testfahrt in Liter pro Stunde .

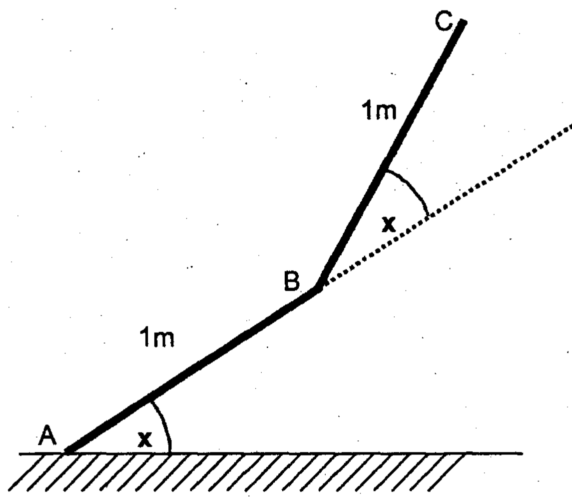
c) Bei Geschwindigkeiten unter 50 km/h beschreibt die Funktion k den tatsächlichen Kraftstoffverbrauch (in l/100 km) nicht richtig, da das Testfahrzeug einen minimalen Kraftstoffverbrauch von 2,5 Liter pro Stunde hat.
Geben Sie für $0 < x < 160$ (x in km/h) eine abschnittsweise definierte Funktion f an, die den Kraftstoffverbrauch des Testfahrzeugs (in l/100 km) beschreibt und dabei den Minimalverbrauch berücksichtigt. Skizzieren Sie das Schaubild von f.

(18 VP)

Wahlteil Schwerpunkt Analysis

Aufgabe I 3.1

Ein Roboter (siehe nebenstehende Skizze) besteht aus zwei je 1 m langen Armen mit den zwei Gelenken A und B sowie dem Greifer C. Das Programm zur Steuerung des Roboters ist hierbei so ausgelegt, dass die Einstellwinkel x an beiden Gelenken stets gleich groß sind.



a) Zeichnen Sie die Lage des Roboters für drei selbst gewählte Einstellwinkel.

b) Zeigen Sie, dass sich die Höhe des Greifers C über dem Erdboden durch die Funktion h mit $h(x) = \sin(x) + \sin(2x)$; $x \in ID_h$ beschreiben lässt.

c) Bei welchen Einstellwinkeln befindet sich der Greifer C auf der Höhe des Erdbodens? Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge ID_h an.

d) Bestimmen Sie die maximale Höhe, die der Greifer C erreichen kann.

e) Bei welchem Einstellwinkel steht der Greifer C genau senkrecht über dem Gelenk A?

(13 VP)

Aufgabe I 3.2

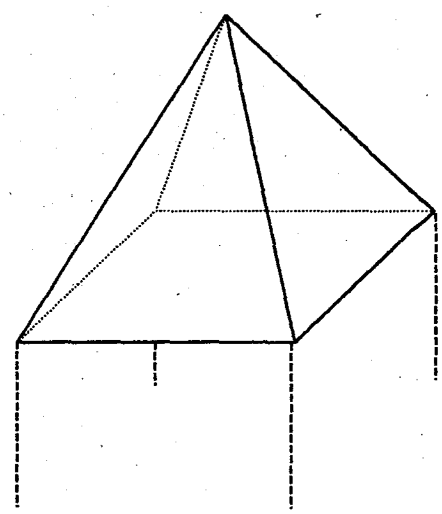
Erläutern Sie ein Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen.

(5 VP)

Wahlteil Schwerpunkt Analytische Geometrie

Aufgabe II.1

Das Dach eines Turmes hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Länge der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils 6 m.



a) Es werden Stützbalken eingezogen. Jeder Balken ist in einer der Quadratecken verankert und stützt den jeweils gegenüberliegenden Dachkantenbalken senkrecht ab.
Berechnen Sie die Länge der Stützbalken.
Welchen Abstand hat ihr Kreuzungspunkt zu den Dachflächen?

b) Welcher Punkt im Innern der Pyramide hat von den Dachflächen und der Grundfläche denselben Abstand?

(18 VP)

Wahlteil Schwerpunkt Analytische Geometrie

Aufgabe II.2

Gegeben sind die Punkte A $(0|1|0)$ und B$(-4|5|-2)$.

a) Es gibt unendlich viele Punkte C, für die jeweils das Dreieck ABC gleichseitig ist.
Beschreiben Sie die Ortslinie aller Punkte C.
Geben Sie die Koordinaten eines solchen Punktes C an.

b) Die Pyramide ABCS sei ein Tetraeder.
Beschreiben Sie, ohne die Rechnung explizit durchzuführen, ein Verfahren, mit welchem der Punkt S bestimmbar ist.

c) E sei die Ebene, bezüglich der die Punkte A und B spiegelbildlich liegen.

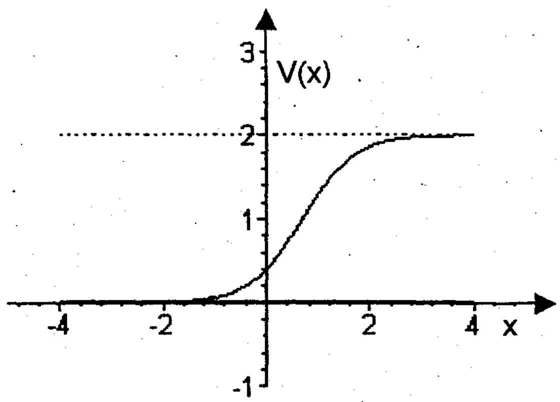
Von A ausgehend wird ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ geschickt.

Begründen Sie, dass damit ein in der Ebene E liegender Spiegel getroffen werden kann.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dessen Hilfe man alle Punkte des reflektierten Lichtstrahls bestimmen kann.
Wie groß ist der Winkel, den der einfallende und der reflektierte Strahl miteinander einschließen?

(18 VP)

zu I 1.1

a)



$$V = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{2}{1+4\,e^{-2x}} \right)^2 dx \approx \mathbf{10{,}86}$$

(GTR)

b)

$f(x) > 0$; da $2\,e^{2x} > 0$ und $e^{2x} + 4 > 0$;
d.h. K besitzt **keine Schnittpunkte mit der x-Achse**.

$f(0) = \frac{2}{5}$; $S\left(0 \mid \frac{2}{5}\right)$ ist **Schnittpunkt von K mit der y-Achse**.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{1+4\,e^{-2x}} = 0$; d.h. K besitzt die **waagrechte Asymptote y = 0**.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{1+4\,e^{-2x}} = 2$; d.h. K besitzt die **waagrechte Asymptote y = 2**.

e^x wächst streng monoton; e^{-x}, e^{-2x} und $1+4\,e^{-2x}$ fallen streng monoton;
$\frac{2}{1+4\,e^{-2x}}$ wächst streng monoton;
Da f streng monoton wächst, besitzt K **keine Extrempunkte**.

c)

$$f(x) = \left(2\,e^{2x}\right) : \left(e^{2x} + 4\right) = 2 - \frac{8}{e^{2x}+4}$$

$$u(x) = f(x) - h(x) = \left(2 - \frac{8}{e^{2x}+4}\right) - \left(2 - \frac{8}{e^{2x}}\right) = -\frac{8}{e^{2x}+4} + \frac{8}{e^{2x}} = \frac{32}{e^{4x}+4e^{2x}} > 0 \;;$$

$$u'(x) = -32 \frac{4e^{4x} + 8e^{2x}}{\left(e^{4x}+4e^{2x}\right)^2} < 0$$

d.h. der Unterschied **f(x) - h(x) fällt streng monoton**.
Der maximale Unterschied beträgt **u(2) ≈ 0,01** .

d)

Wegen $h'(x) = 16\,e^{-2x}$ **erfüllt h die Differenzialgleichung** $h'(x) = 2\left(2 - h(x)\right)$.
h beschreibt daher ein beschränktes Wachstum mit der Stättigungsgrenze 2.

Nach Aufgabenteil a) kommt als Sättigungsgrenze nur die Zahl 2 in Frage.

Mit $f'(x) = \dfrac{16\,e^{2x}}{\left(e^{2x}+4\right)^2}$ folgt aus der DGL $f'(x) = k\left(2 - f(x)\right)$: $\quad k = \dfrac{2\,e^{2x}}{\left(e^{2x}+4\right)}$.

Da k nicht konstant ist, beschreibt f **kein beschränktes Wachstum**.

zu I 1.2

$a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{2}{5}$; $a_3 = \frac{3}{7}$; $a_4 = \frac{4}{9}$; Vermutung: $\mathbf{a_n = \dfrac{n}{2n+1}}$

Nachweis durch **vollständige Induktion**:

Induktionsanfang: $a_1 = \dfrac{1}{2\cdot 1+1} = \dfrac{1}{3}$ (wahr)

Induktionsschritt:

Nach der Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$ und der Induktionsvoraussetzung

$a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ gilt:

$$a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} = \frac{(2n^2+3n+1):(2n+1)}{2n+3} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}$$

d.h. $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$ liefert für alle $n \in \mathbb{N}$ die Glieder der rekursiv gegebenen Folge (a_n).

zu I 2

a) $v'(t) = \dfrac{1600}{(10t+1)^2} > 0$; d.h. **v ist streng monoton wachsend**

$v(t) = 40 \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{1}{30}$; d.h. **2 min** $\quad k(40) = \dfrac{100}{21}$; d.h. **ca. 4,76 l/100km**

b) **Einem Verbrauch von $k(v(t))$ Litern pro 100 km entspricht ein Verbrauch von $\dfrac{k(v(t))}{100}$ Litern pro km.**

Da in einer Stunde v(t) Kilometer zurückgelegt werden, werden $\dfrac{k(v(t))}{100} \cdot v(t)$ Liter pro Stunde verbraucht.

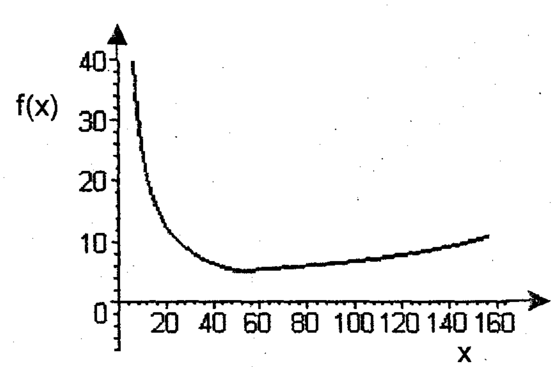
Gesamtverbrauch:

$$\frac{k(v(t)) \cdot v(t)}{100} = \frac{\dfrac{1000}{250 - \frac{1600t}{10t+1}} \cdot \dfrac{1600t}{10t+1}}{100} = \frac{10}{250 - \frac{1600t}{10t+1}} \cdot \frac{1600t}{10t+1} = \frac{16000t}{2500t + 250 - 1600t} = \frac{320t}{18t+5}$$

Durchschnittlicher Verbrauch
41,1 : 3 = 13,7 ; d.h. **ca. 13,7 Liter pro Stunde**

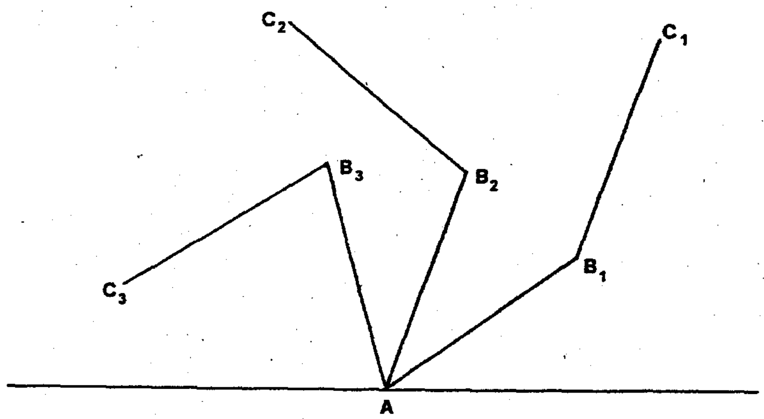
c) Modellierung: Zur Vermeidung eines sprunghaften Verlaufs des Kraftstoffverbrauchs wird zunächst die Abschnittsgrenze (50 km/h) betrachtet. Bei dieser Geschwindigkeit werden in einer Stunde 50 km zurückgelegt und nach der Funktion k 2,5 Liter Kraftstoff verbraucht (k(50)=5; 5 Liter pro 100 km entsprechen 2,5 Liter für 50 km).
Bei kleineren Geschwindigkeiten (0<x<50) verlängert sich die Fahrtdauer für beliebige aber fest vorgegebene Strecken. So führt z.B. eine Halbierung der Geschwindigkeit zu einer Verdoppelung der Fahrzeit und wegen des minimalen Kraftstoffverbrauchs von 2,5 l /h auch zu einer Verdoppelung des Kraftstoffverbrauchs.

$$\mathbf{f(x) = \begin{cases} \dfrac{250}{x}\,;\ 0 < x < 50 \\ k(x)\,;\ 50 \le x < 160 \end{cases}}$$

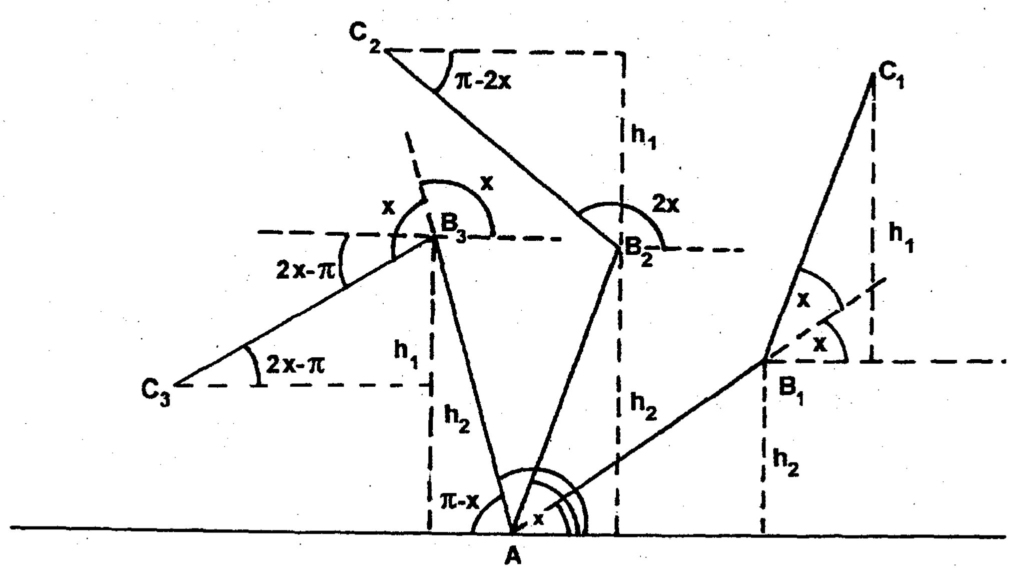


zu I 3.1

a) Einstellwinkel: 35°, 70° und 105°.



b) Über die Addition von Teilhöhen ergibt sich der entsprechende Funktionsterm (s. Abbildung):



Für $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$: Der Winkel bei B hat die Weite 2x (Stufenwinkel an parallelen Geraden).

Daraus folgt $h_1 = \sin(2x)$. Mit $h_2 = \sin(x)$ ergibt sich: $h(x) = h_2 + h_1 = \sin(x) + \sin(2x)$.

Entsprechend gilt für $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{2}$: $h(x) = h_2 + h_1 = \sin(x) + \sin(\pi - 2x) = \sin(x) + \sin(2x)$.

Entsprechend gilt für $\frac{\pi}{2} \le x$: $h(x) = h_2 - h_1 = \sin(\pi - x) - \sin(2x - \pi) = \sin(x) + \sin(2x)$.

c) Auf Höhe des Erdbodens befindet sich der Greifer C, wenn $h(x) = 0$.
Mit dem GTR ergibt sich $x = 0$ oder $x \approx 2{,}09$.
Dadurch ergibt sich auch eine Einschränkung des Definitionsbereichs von h auf das Intervall [0 ; 2,09].

d) Der zugehörige Einstellwinkel ergibt sich mit dem GTR: $x \approx 0{,}94$
$h(0{,}94) \approx 1{,}76$; d.h. die maximale Höhe beträgt ca. 1,76 m.

e) Der Greifer steht genau senkrecht über dem Gelenk A, wenn für den horizontalen Abstand d(x) von C zu A gilt: d(x) = 0. Dabei ist d(x) = $|\cos(x) + \cos(2x)|$
Mit dem GTR ergibt sich d(x) = 0 für $x \approx 1{,}05$.

Elementargeometrische Überlegungen ergeben folgende exakte Lösungen:

c) $x = 0;\ \ x = \frac{2}{3}\pi;$ e) $x = \frac{\pi}{3}$

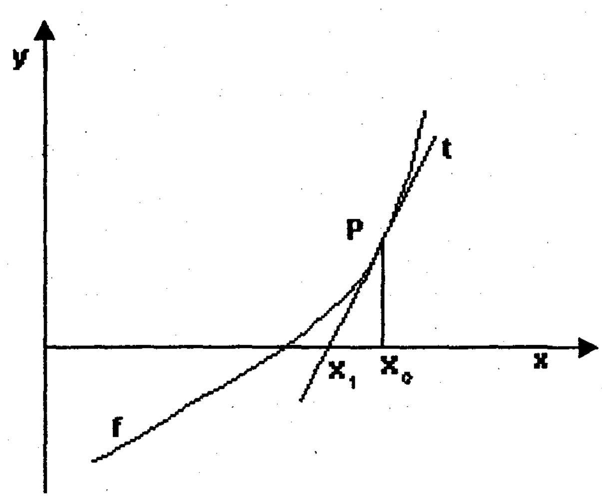
zu I 3.2

Beispiel:

Das newtonsche Näherungsverfahren

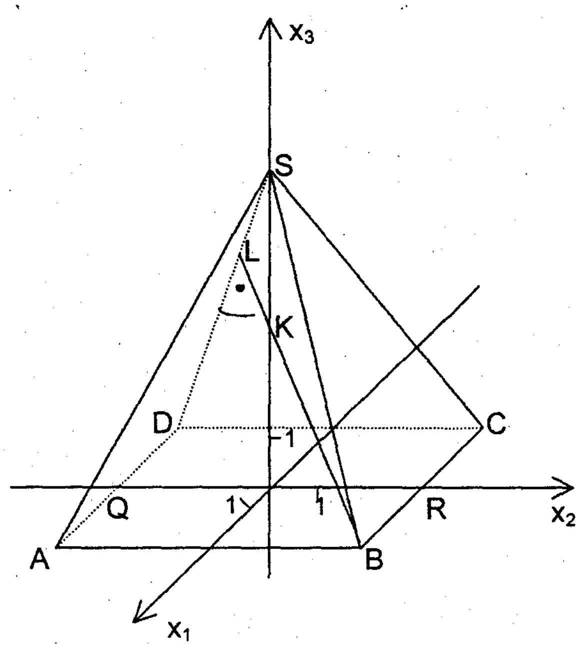
Für das Berechnen von Nullstellen einer Funktion f gibt es häufig keine Lösungsformel, sondern man muss sich der Lösung schrittweise nähern. Ein solches Näherungsverfahren ist z.B. das newtonsche Näherungsverfahren. Zunächst bestimmt man etwa mit Hilfe des Schaubildes von f eine Näherungslösung x_0 für die Nullstelle x^* der Funktion.
Da sich das Schaubild von f lokal gut durch eine Tangente ersetzen lässt, betrachtet man die Tangente an das Schaubild von f im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und schneidet diese mit der x-Achse. Damit hat man, wie die Skizze zeigt, unter „normalen Umständen" einen besseren Näherungswert x_1 für x^*. Dieses Verfahren setzt man fort. Mit der Formel $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ lassen sich diese Näherungswerte iterativ bestimmen.

Gleichwertige Lösungen könnten auch Beispielrechnungen, Vergleiche mit einem anderen Verfahren oder eine explizite Herleitung der Formel beinhalten.



Zu II.1

a) Der Ursprung wird in die Mitte der Grundfläche gelegt. Die Achsen verlaufen parallel zu den Grundkanten der Pyramide.
Dann haben die Eckpunkte des Daches die Koordinaten:
A (3| -3| 0), B (3| 3| 0), C (-3| 3| 0), D (-3| -3| 0) und S (0| 0| 6).



Länge der Stützbalken:
Die Länge der Stützbalken erhält man z. B. als Abstand des Punktes B von der Geraden (DS):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

Hilfsebene H orthogonal zu (DS) durch B:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \text{ bzw. } x_1 + x_2 + 2x_3 = 6.$$

Schnittpunkt von H und (DS) ist Lotfußpunkt L:

$$1\cdot(-3+3t)+1\cdot(-3+3t)+2\cdot 6t = 6;$$

$$t = \frac{2}{3};\quad L(-1|-1|4);$$

$$d(B;L) = \left|\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix}\right| = 4\sqrt{3}.$$ Die Stützbalken haben die Länge $\underline{\underline{4\sqrt{3}}}$.

Abstand des Kreuzungspunktes zu den Dachflächen:
Aus Symmetriegründen schneiden sich alle Stützbalken auf der x_3-Achse, wenn man sie als Strecken sieht. Ihr Kreuzungspunkt ist der Schnittpunkt von (BL) mit der x_3-Achse.

(BL): $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}-4\\-4\\4\end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R};$ $x_1 = x_2 = 0$ ergibt $r = \frac{3}{4}$; also K (0| 0| 3).

Der Abstand zu allen Dachflächen ist gleich groß.

Dachfläche in der Ebene E = (DAS); E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\ s, t \in \mathbb{R};$

HNF von E: $\frac{-2x_2 + x_3 - 6}{\sqrt{5}} = 0$; $d(K; E) = \left|\frac{3-6}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{5}.$

Der Kreuzungspunkt hat von den Dachflächen den Abstand $\underline{\underline{\frac{3}{5}\sqrt{5}}}$.

b) Aus Symmetriegründen muss der gesuchte Punkt P auf der x_3 –Achse liegen.

$P(0|\,0|\,a)$ mit $0 < a < 6$. Dabei ist a sein Abstand von der Grundfläche.

Damit P auch den Abstand a von den Seitenflächen hat, muss gelten: $d(P;E) = a$.

Daraus: $\left|\frac{-2\cdot 0 + a - 6}{\sqrt{5}}\right| = a$; wegen $0 < a < 6$: $6 - a = \sqrt{5}a$

$a = \frac{6}{1+\sqrt{5}} = \frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Der Punkt P hat die Koordinaten $\underline{\underline{P\left(0\,\middle|\,0\,\middle|\,\frac{3}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)}}$.

Bemerkung: Schneller kommt man zur Lösung, wenn man das Problem zweidimensional löst und einerseits das Dreieck DBS und andererseits das Dreieck QRS (vgl. Skizze) betrachtet.

Zu II.2

a) Ortslinie:

Die Ortslinie der Punkte C ist ein Kreis k.

Dieser Kreis k liegt in der Ebene senkrecht zu $\overrightarrow{AB}$, die den Mittelpunkt M (-2| 3| -1) der Strecke AB enthält.

M ist auch der Mittelpunkt von k. Der Radius von k ist $\frac{1}{2}d(A;B)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

Koordinaten eines möglichen Punktes C:

Wegen $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=0$ ist der Vektor $\vec{h}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ zu $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}$ orthogonal.

Er gibt somit die Richtung einer möglichen Dreieckshöhe an.

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\frac{6}{2}\sqrt{3}\,\vec{h}^0=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}+3\sqrt{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}+\frac{3}{2}\sqrt{6}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix};$$

$C\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{6}\;\middle|\;3+\frac{3}{2}\sqrt{6}\;\middle|\;-1\right)$ ist ein möglicher Punkt.

b) Bestimmung von S:

Mithilfe der Formel wird der Schwerpunkt S_0 des Dreiecks ABC bestimmt. g sei die Orthogonale zur Ebene (ABC) durch S_0. S ist dann ein Punkt auf g. Die Bedingung $\left|\overrightarrow{AS}\right|=6$ ergibt den Parameterwert für S in der Geradengleichung. Einsetzen des Parameters in die Geradengleichung liefert die Koordinaten von S. Es gibt zwei Lösungen.

c) Der Lichtstrahl kann einen Spiegel treffen:

A und B liegen spiegelbildlich zur Ebene E: $\left[\vec{x}-\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}=0$.

Der Lichtstrahl hat die Richtung $\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}$. Wegen $\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}\neq 0$ ist der Strahl nicht parallel zu E.

Er kann dort einen Spiegel treffen.

<u>Punkte des reflektierten Strahls:</u>

Die Gerade g: $\vec{x} = \vec{a} + t\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ schneidet E in S_P.

Dann liefert die Gleichung $\underline{\underline{\vec{x} = \vec{b} + r\left(\vec{s_P} - \vec{b}\right)}}$ für $\underline{\underline{r \geq 1}}$ die Ortsvektoren all dieser Punkte.

<u>Bestimmung des Winkels zwischen dem einfallenden und dem reflektierten Strahl:</u>

Es gilt $\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\4\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}\right|}{6\sqrt{38}} = \frac{5}{\sqrt{38}}$; $\alpha \approx 35{,}8°$.

Wegen $\beta = \alpha$ beträgt die Weite des gesuchten Winkels $\underline{\underline{2\alpha \approx 71{,}6°.}}$