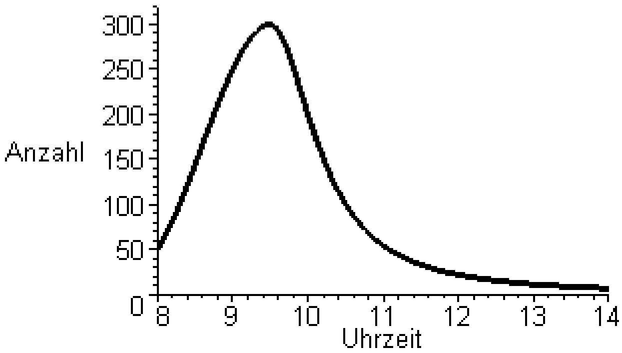
Aufgabe 1 (Warteschlange am Kartenschalter)



Das Schaubild zeigt die Entwicklung der momentanen Ankunftsrate (Ankommende pro Stunde) am Kartenschalter eines Musiktheaters. Der Schalter öffnet um 9.00 Uhr; pro Stunde werden 200 Personen abgefertigt.

Bestimme jeweils einen möglichst genauen Schätzwert für

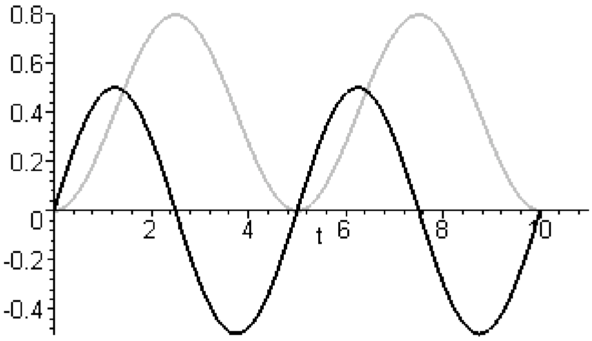
- die Länge der Schlange um 9.00 Uhr.
- die Rate, mit der die Schlange um 10.00 Uhr wächst.
- den Zeitpunkt, an dem die Schlange am längsten ist.
- die Wartezeit einer Person, die um 9.00 Uhr kommt.
- den Zeitpunkt, an dem sich die Schlange auflöst.

Aufgabe 2 (Luftvolumen in der Lunge)

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge kann durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2}{5}\pi\, t)\,;\; t \geq 0$ modelliert werden (Volumen in Liter, Zeit t in Sekunden).

- Welche Bedeutung hat die Integralfunktion bzgl. 0 von f ?

Wir nehmen an, dass zur Zeit t=0 keine Luft in der Lunge ist. Das folgende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und der momentanen Änderungsrate des Luftflusses.



- Welche Kurve beschreibt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge?

- Wie groß ist das maximale (minimale) Luftvolumen in der Lunge?

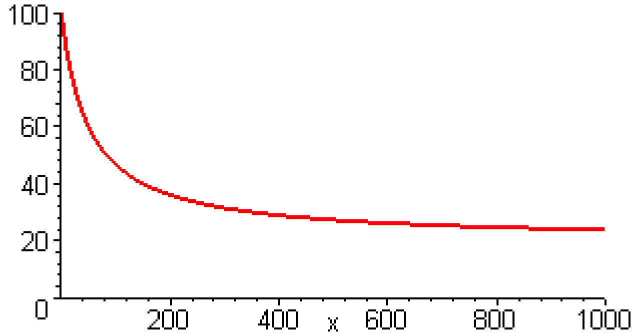
- Wann enthält die Lunge die Hälfte des maximalen Luftvolumens?

- Wie groß ist die mittlere Luftflussrate während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

- Wie groß ist das mittlere Luftvolumen in der Lunge während der Zeitintervalle [0 ; 2,5] , [2,5 ; 5] und [0 ; 5] ?

Aufgabe 3 (Airbus)

Die Fertigungskosten f(x) (in willkürlichen Geldeinheiten), welche bei Serienfertigung für ein AIRBUS-Seitenleitwerk aus Metall angefallen sind, werden angenähert durch $f(x) = \frac{20x + 5000}{x + 50}$ beschrieben. Dabei bedeutet x die Anzahl der hergestellten Seitenwerke.
Die folgende Figur zeigt ein Schaubild C_f von f.



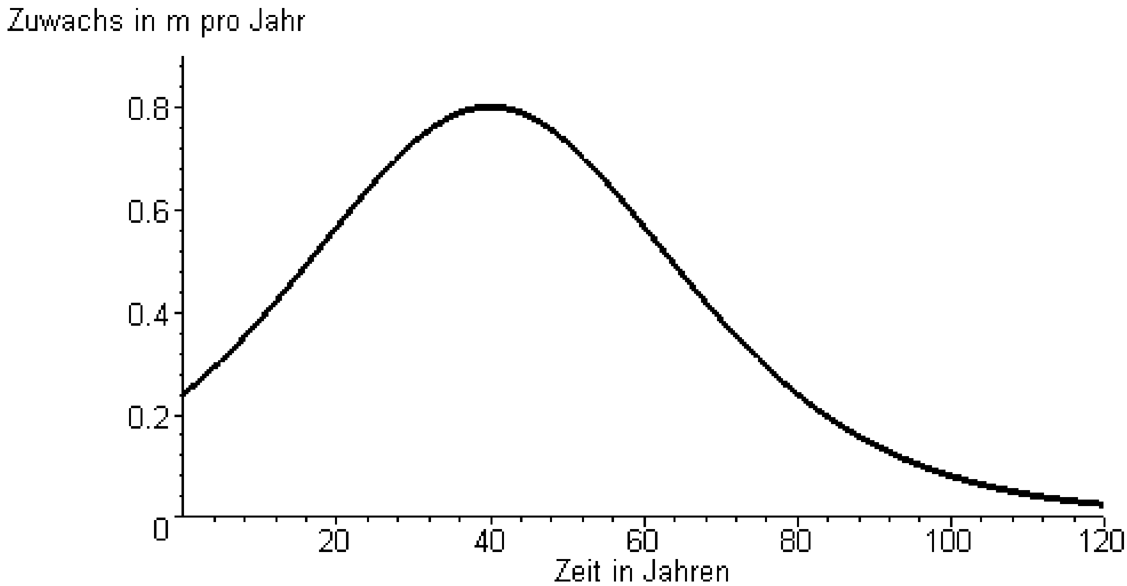
a) Interpretieren Sie den Verlauf von C_f anwendungsbezogen (Stichworte: Lerneffekt, Rationalisierung).
Mit welchen Herstellungskosten pro Stück ist langfristig zu rechnen?

b) Nach Fertigung des 299. Leitwerksexemplars steht eine neue Technologie zur Verfügung, bei der das Flugzeugteil weitgehend aus kohlefaserverstärktem Kunststoff hergestellt wird. Die Herstellungskosten g(x) für eines dieser deutlich leichteren Leitwerke werden näherungsweise durch $g(x) = \frac{15x - 5000}{x - 280}$; $x \geq 300$ beschrieben.
Ab welcher Stückzahl führt die neue Technologie zu günstigeren Herstellungskosten?
Übertragen Sie die oben dargestellte Kurve C_f auf ihr Arbeitsblatt und skizzieren Sie im selben Achsenkreuz das Schaubild C_g von g.

c) Die Kurve C_g, die x-Achse und die Geraden x=300 und x=399 begrenzen eine Fläche. Der Inhalt dieser Fläche entspricht einem Näherungswert für die Fertigungskosten, welche bei Fertigung mit der neuen Technologie für die ersten 100 Leitwerke insgesamt aufgewendet werden müssen.
Zeigen Sie, dass die neue Technologie ab dem 721. Seitenleitwerk insgesamt rentabel wird.
Erläutern Sie anhand der Schaubilder C_f und C_g die Aussage: „Die Einführung einer neuen Technologie kann vorübergehend zu großen Verlusten, manchmal sogar zum Konkurs führen“.

d)
Aufgabe 4 (Höhenwachstum einer Fichte)

Die folgende Abbildung zeigt die Entwicklung der momentanen Höhenzuwachsrate w einer Fichte in Abhängigkeit von ihrem Alter t (Zuwachsrate in m pro Jahr; Alter in Jahren seit dem Pflanzen des Fichtensetzlings).



w kann in den ersten zwanzig Jahren näherungsweise beschrieben werden durch
$w_1(t) = 0{,}24 \cdot e^{0{,}045 \cdot t}$; (t in Jahren, $w_1(t)$ in m pro Jahr).

Eine Fichte gilt als ausgewachsen, wenn der gesamte in der Folgezeit noch zu erwartende Zuwachs an Höhe nur noch weniger als 2 m beträgt.
Ermitteln Sie unter Verwendung von erkennbaren Symmetrieeigenschaften des angegebenen Schaubildes, wann dies der Fall ist.

Wie groß ist der durchschnittliche jährliche Höhenzuwachs in den ersten zwanzig Jahren?

Aufgabe 5

Eine Gerade zerlegt die Ebene in zwei Gebiete. Untersuchen Sie, in wieviele Gebiete die Ebene durch n Geraden höchstens zerlegt werden kann.

Variante A

Geben Sie eine Rekursionsvorschrift für die Maximalzahl Z(n) an und bestimmen Sie damit eine explizite Berechnungsvorschrift für die Maximalzahl Z(n) der Gebiete bei n Geraden.

Variante B

Erklären Sie, dass die Maximalzahl Z(n) der Teilgebiete der Rekursionsvorschrift
$Z(n+1) = Z(n) + n + 1$ genügt.
Geben Sie eine explizite Berechnungsvorschrift an und beweisen Sie diese.

zu 1:

Vereinfachend wird hier ein zeitlich kontinuierlich verlaufender Vorgang angenommen (Modell). Dem Schaubild kann zu jedem Zeitpunkt $t \in [8;14]$ die momentane Änderungsrate der Ankommenden entnommen werden.

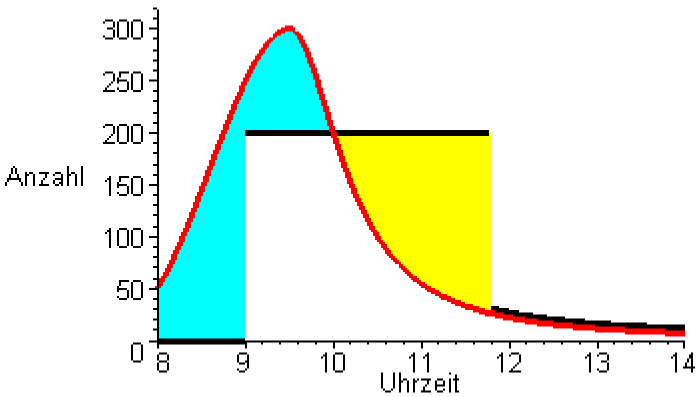
<u>Länge der Schlange um 9.00 Uhr</u>
Die momentane Ankunftsrate um 8.00 Uhr beträgt ca. 50 Personen pro Stunde.
Die momentane Ankunftsrate um 9.00 Uhr beträgt ca. 250 Personen pro Stunde.
Bei einem linearen Verlauf der momentanen Ankunftsrate im Zeitintervall von 8.00 Uhr bis 9.00 Uhr ergibt sich für diesen Zeitraum eine durchschnittliche Ankunftsrate von ca. 150 Personen pro Stunde. Da der Schalter erst um 9.00 Uhr öffnet besteht die Schlange zu diesem Zeitpunkt aus ca. 150 Personen.

<u>Momentane Wachstumsrate der Schlange um 10.00 Uhr</u>
Die momentane Ankunftsrate stimmt um 10.00 Uhr mit der momentanen Abfertigungsrate von 200 Personen pro Stunde überein.
Die Differenz dieser beiden Änderungsraten ist die momentane Wachstumsrate der Schlange (0 Personen pro Stunde); d.h. die Länge der Schlange ändert sich um 10.00 Uhr nicht.

<u>Zeitpunkt, an dem die Schlange am längsten ist</u>
Vor (um; nach) 10.00 Uhr ist die momentane Ankunftsrate größer (gleich; kleiner) als die momentane Abfertigungsrate. Die momentane Wachstumsrate der Schlange wechselt um 10.00 Uhr ihr Vorzeichen. D.h. um 10.00 Uhr ist die Schlange am längsten.

<u>Wartezeit einer Person, die um 9.00 Uhr ankommt</u>
Bei Ankunft hat die Person ca. 150 Personen vor sich (siehe oben). Bei einer konstanten Abfertigungsrate von 200 Personen pro Stunde beträgt die Wartezeit eine dreiviertel Stunde.

<u>Zeitpunkt, an dem sich die Schlange auflöst</u>
Die Länge der Schlange läßt sich durch die Integralfunktion der Wachstumsratenfunktion mit 8 Uhr als unterer Grenze beschreiben. Einen Schätzwert für die gesuchte Nullstelle dieser Integralfunktion erhält man durch Betrachtung zweier Teilflächen, die zwischen den sich schneidenden Schaubildern der Ankunftsratenfunktion und der Abfertigungsratenfunktion liegen.



Etwa um 11.458 Uhr hat sich die Schlange aufgelöst, da dann die entsprechenden Flächenstücke etwa den gleichen Flächeninhalt haben. Dieser Schätzwert kann relativ ungenau sein, da die Teilflächen, mitverursacht durch die Sprungstelle der Abfertigungsratenfunktion, sehr unterschiedliche Formen haben und daher die visuelle Abschätzung der Flächeninhalte zu größeren Fehlern führen kann.

Zu 2:

Bedeutung der Integralfunktion

Die Integralfunktion ordnet jedem Zeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls, die jeweilige Abweichung des zu diesem Zeitpunkt in der Lunge vorhandenen Luftvolumens von dem zum Zeitpunkt t=0 in der Lunge vorhandenen Luftvolumen zu. Ein positiver (negativer) Wert bedeutet dabei eine Zunahme (Abnahme) des Luftvolumens gegenüber dem Anfangswert.

Kurve, die den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge beschreibt

Beim Einatmen (Ausatmen) treten positive (negative) Änderungsraten des Luftflusses auf. Dabei nimmt das Luftvolumen in der Lunge zu (ab). Wegen dieses Zusammenhangs kann nur die im 1. Quadrant verlaufende Kurve das Schaubild der Volumenfunktion sein.

Maximales (minimales) Luftvolumen in der Lunge

Aufgrund des periodischen Verhaltens von f (Periodenlänge 5) genügt es das Zeitintervall [0 ; 5] (einen vollständigen Atemzug) zu betrachten.
Da f an der Stelle t=2,5 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, ist 2,5 eine Maximalstelle der Volumenfunktion. $\int_0^{2,5} f(t)\,dt = \frac{5}{2\pi} \approx 0{,}8$ (GTR) ; d.h. das Maximum beträgt ca. 0,8 Liter.
Wegen der Punktsymmetrie des betrachteten Kurvenstücks zum Punkt $P(2{,}5 \mid 0)$ gilt
$\int_0^{2,5} f(t)\,dt = -\int_{2,5}^{5} f(t)\,dt$; d.h. bei einem Atemzug wird genausoviel Luft ausgeatmet, wie zuvor eingeatmet wurde. Da nach der Modellannahme zum Beginn eines Atemzugs (t=0) keine Luft in der Lunge ist, wird das Minimum von 0 Litern am Ende des Ausatmens (t=5) erneut erreicht.

Zeitpunkte, zu denen die Lunge halb gefüllt ist

Das zum Zeitintervall [0 ; 2,5] gehörende Kurvenstück der Funktion f ist symmetrisch zur Geraden $x = 1{,}25$. In diesem Modell ist die Lunge also jeweils 1,25 Sekunden nach Beginn des Einatmens halb gefüllt. Das zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Stück des Schaubilds von f ist symmetrisch zum Punkt $P(2{,}5 \mid 0)$. Die Lunge ist also auch jeweils 1,25 Sekunden vor dem Ende des Ausatmens halb gefüllt. Die Lunge ist also nach jeweils nach 2,5 Sekunden wieder halb voll.

Mittlere Luftflussraten

Zeitintervall [0 ; 2,5] : $\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2,5} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}32$ (GTR)

Das zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Stück des Schaubilds von f ist symmetrisch zum Punkt $P(2{,}5 \mid 0)$. Damit ergibt sich für das Zeitintervall [2,5 ; 5] eine mittlere Luftflussrate von $-\frac{1}{\pi}$.
Da beide Teilintervalle gleich lang sind, beträgt die mittlere Luftflussrate im Zeitintervall [0 ; 5] 0 .

Mittleres Luftvolumen

Zeitintervall [0 ; 2,5] : $\frac{1}{2{,}5}\int_0^{2,5}\left(\int_0^{x} f(t)\,dt\right)dx = \frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$ (GTR)

Das zum Zeitintervall [0 ; 5] gehörende Stück des Schaubilds der Volumenfunktion ist symmetrisch zur Geraden x = 2,5. Daraus folgt auch für das Zeitintervall [2,5 ; 5] ein mittleres Luftvolumen von $\frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$. Da in beiden Teilintervallen das mittlere Luftvolumen gleich groß ist,

beträgt das mittlere Luftvolumen auch im Zeitintervall [0 ; 5] : $\frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$.

Zu 3:

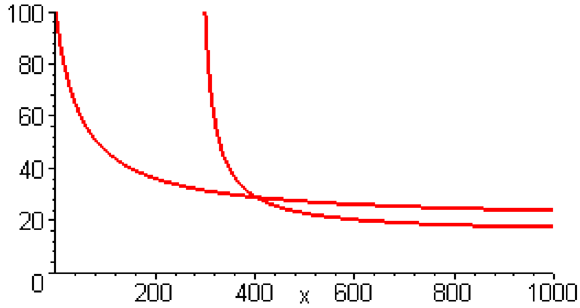
a) Mit wachsender Anzahl bereits gefertigter Seitenleitwerke nehmen die Fertigungskosten pro Stück ab. Die rasche Abnahme der Fertigungskosten in der Anfangsphase der Serienfertigung könnte auf eine zunehmende Erfahrung des Personals (Lerneffekt) zurückzuführen sein. Bei zunehmender Stückzahl sinkt im Allgemeinen auch der z.B. durch Werkzeugmaschinen bedingte Fixkostenanteil (Rationalisierungseffekt).

Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{20x+5000}{x+50} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(20+\frac{4000}{x+50}\right) = 20$ werden die Herstellungskosten auch langfristig über 20 Geldeinheiten pro Stück liegen.
Bei praxisnahen Stückzahlen, z.B. 950, liegen die Herstellungskosten f(950) =24 jedoch deutlich über diesem theoretischen Grenzwert (um 20%).

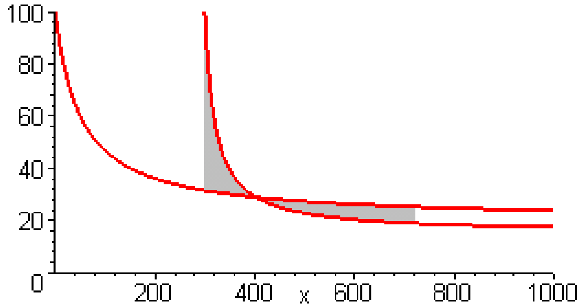
b) Für $x \geq 300$ gilt: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{20x+5000}{x+50} = \frac{15x-5000}{x-280} \Leftrightarrow x^2 + 230x - 255000 = 0$

$\Leftrightarrow x = -115 + 5\sqrt{10729} \approx 402{,}9$

Ab dem 403. Seitenleitwerk wird mit der neuen Technologie günstiger gefertigt.
Skizze:



c) Die neue Technologie führt bei den Leitwerken 300 bis 402 zu Mehrkosten. Die gesuchte Rentabilitätsgrenze liegt dort, wo Einsparungen durch die neue Technologie diese Mehrkosten erstmals übersteigen.
Mehrkosten und Einsparungen können durch entsprechende Flächenstücke veranschaulicht werden.



Mit dem GTR erhält man: $\int\limits_{300}^{720} (g(x)-f(x))dx \approx 0{,}9 > 0$ und $\int\limits_{300}^{721} (g(x)-f(x))dx \approx -5{,}4 < 0$

Von der Einführung der neuen Technologie bis zur Rentabilitätsgrenze arbeitet die Firma mit Verlust. Dieser ist unmittelbar nach der Einführung besonders hoch. Wenn der Absatz nicht mindestens bis zur Rentabilitätsgrenze gesichert ist, kann dieser Verlust die Firma in den Konkurs treiben.

Zu 4:

Die Funktion w ist ein stetiges Modell für die Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Höhe einer Fichte.
Aus der Momentanänderung erhält man den Höhenzuwachs durch Integration („Gesamteffekt von Änderungsraten").

Das Schaubild lässt eine Symmetrie zu t = 40 vermuten. Wir nehmen an, dass w(t) für $t \geq 60$ (auch über t = 80 hinaus) näherungsweise durch $w_2(t) = 0{,}24 \cdot e^{-0{,}045\cdot(t-80)}$ beschrieben werden kann.
Ist a das Alter einer ausgewachsenen Fichte in Jahren, so gilt:

$$2 = \lim_{u\to\infty}\int_a^u w_2(t)\,dt = \lim_{u\to\infty}\left[-\frac{16}{3}\cdot e^{-0{,}045\cdot t+3{,}6}\right]_a^u = \frac{16}{3}\cdot e^{-0{,}045\cdot a+3{,}6} \Leftrightarrow a \approx 101{,}8;\quad \text{(GTR)}$$

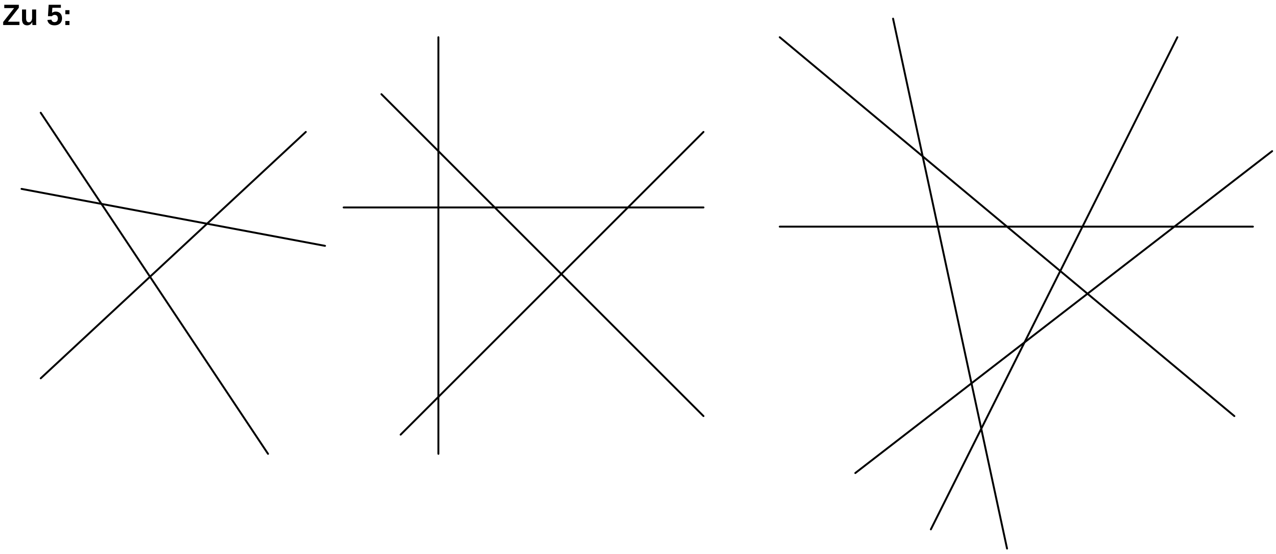
Die Fichte ist also nach etwa 102 Jahren ausgewachsen.

Der durchschnittliche jährliche Höhenzuwachs in den ersten zwanzig Jahren wird ebenfalls durch Integration bestimmt:

In den ersten zwanzig Jahren beträgt der Zuwachs an Höhe $\Delta H \approx \int_0^{20} w_1(t)\,dt \approx 7{,}78$ [m].

Damit ist der durchschnittliche jährliche Zuwachs an Höhe $\frac{1}{20}\cdot\Delta H \approx 0{,}39$ [m].

Zu 5:



Für 3, 4, 5,... Geraden erhält man maximal 7, 11, 16,... Gebiete, wenn sich alle Geraden paarweise in verschiedenen Punkten schneiden.

Sind bereits n Geraden gezeichnet und trägt man in diese Figur eine weitere Gerade so ein, dass sie zu keiner bisherigen parallel ist und durch keinen der bereits gezeichneten Schnittpunkte geht so erhält man n + 1 neue Gebiete.
Begründung: Durch die zuletzt gezeichnete Gerade g erhält man n neue Schnittpunkte, durch die g in n + 1 Abschnitte zerlegt wird. Jeder dieser n + 1 Abschnitte teilt ein bereits vorhandenes Gebiet in zwei, so dass sich die Anzahl der Gebiete um n + 1 erhöht.

Rekursionsvorschrift:

$$Z(n+1) = Z(n) + n + 1.$$

Explizite Berechnungsvorschrift:
Da vor dem Zeichnen der ersten Geraden bereits ein Gebiet vorhanden war, erhält man als maximale Anzahl Z (n) der Gebiete bei n Geraden

$$Z(n) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) + n.$$

Da sich die Summe der ersten n natürlichen Zahlen durch $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ beschreiben lässt (Nachweis durch vollständige Induktion) , gilt: $Z(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + 1.$