Übersicht über exponentielles und beschränktes Wachsen und Zerfallen

Exponentielles Wachsen und Zerfallen

Differentialgleichung: $f'(x)=k\cdot f(x)$

Beim exponentiellen Wachsen und Zerfallen ist die Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x)$ für jeden x-Wert proportional, d. h. $f'(x)\sim f(x)$. Anders ausgedrückt: die Änderungsrate $f'(x)$ ist zum Bestand $f(x)$ für alle $x\in D$ proportional.

Es existiert also eine Proportionalitätskonstante $k=\frac{f'(x)}{f(x)}$

Dabei ist k < 0 bei exponentiellem Zerfall, k > 0 bei exponentiellem Wachsen.

Lösung der Dgl.: $f(x)=c\cdot e^{k\cdot x}$

(Dass dies eine Lösung ist, sieht man durch Ableiten dieser Funktion).

Den Wert für c erhält man aus einer Anfangsbedingung: $f(0)=c$ oder durch Angabe eines anderen x-Wert-Funktionswert-Paares (z. B. $f(3)=7$).

Beschränktes Wachsen bzw. Zerfallen

In vielen Fällen ist ein Wachstums- bzw. Zerfallsvorgang nach oben bzw. nach unten begrenzt. Dann wird ein solcher Prozess oft durch die Differentialgleichung des beschränkten Wachsens bzw. Zerfallens beschrieben.

Differentialgleichung: $f'(x)=k\cdot[S-f(x)]$

Die Änderungsrate $f'(x)$ ist dabei proportional zur Differenz $S-f(x)$ der *Sättigungsgrenze* S und dem Funktionswert $f(x)$. Diese Differenz wird *Sättigungsmanko* genannt. Mit dem Sättigungsmanko $S-f(x)$ gilt folglich $f'(x)\sim[S-f(x)]$.

Somit gilt für den Proportionalitätsfaktor k: $k=\frac{f'(x)}{S-f(x)}$.

Die **Lösung für die Differentialgleichung** ist $f(x)=S-c\cdot e^{-k\cdot x}$ mit k > 0, $S\in\mathbb{R}$.

Dabei liegt für c > 0 ein beschränktes Wachstum, für c < 0 ein beschränkter Zerfall vor.

Für c gilt: $c=S-f(0)$, denn $f(0)=S-c\cdot e^{-k\cdot 0}=S-c$.

Beachte: Oft wird die Dgl. in der Form $f'(x)=100-4\cdot f(x)$ angegeben. Dann ist $100=k\cdot S$ und 4 = k ! k muss also ausgeklammert werden, um S zu erhalten.

Beispiele für die Kurven: s. Buch S. 143 .